

1 Introdução

Segundo Enders (2015, cap.1), a econometria de séries de tempo tem três principais objetivos: prever, interpretar e testar hipóteses sobre séries de tempo econômicas. Uma série de tempo é a trajetória, ao longo do tempo, de uma única variável, p.ex., PIB ou inflação. Tal tipo de dado é de interesse particularmente em macroeconomia. Um exemplo são os modelos dinâmicos estocásticos de equilíbrio geral, amplamente utilizados por macroeconomistas, incluindo aqueles que participam do Comitê de Política Monetária, o qual decide quanto à taxa de juro de referência da economia brasileira (SELIC).

A abordagem clássica da econometria de séries de tempo concebia tais séries como compostas por quatro elementos: tendência, sazonalidade, ciclo, e perturbação irregular. A tendência é o comportamento de longo prazo, o ciclo e a sazonalidade as oscilações periódicas e a perturbação irregular os desvios das trajetórias traçadas pelos componentes anteriores. Essa abordagem clássica não será objeto desta disciplina. Serão focadas técnicas estatísticas que permitem estimar a trajetória completa da série tal como observada, ou seja, com todos os componentes integrados.

Um exemplo interessante de uma série é o do preço diário de uma ação emitida por uma empresa. A teoria de economia das finanças postula que a variação diária do preço de uma ação tem média nula, pois o mercado de ações deve estar em equilíbrio, não havendo oportunidade para ganhos de arbitragem (i.e., ganhos obtidos a partir da compra da ação e da venda da mesma posteriormente por preço maior). Trata-se de um processo estocástico conhecido como ruído branco, pois ele tem (i) média nula, (ii) correlação nula entre valores referentes a instante de tempo distintos e (iii) variância temporalmente constante.

2 Equações a diferença finitas estocásticas: dois métodos de solução

2.1 Definições

Uma equação a diferença finita básica é o processo autoregressivo de ordem um, ou, sinteticamente, AR(1). Esta equação estabelece uma relação entre (i) o valor corrente de uma variável e (ii) o valor prévio da mesma variável. Denotando o instante de tempo corrente por “t” e o instante imediatamente prévio por t-1, tem-se:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + e_t$$

Em que o termo e_t é uma variável aleatória, ou seja, uma variável que assume valores com probabilidades determinadas por uma função distribuição de probabilidades específica. Neste momento não é necessário especificar tal

distribuição e nem mesmo a média, variância e a covariância temporal da variável e_t (isso será feito mais à frente).

A expressão acima estabelece que o valor corrente da variável “ y ” é uma função linear do valor a um passo atrás da mesma variável, aumentada por uma perturbação aleatória (tal perturbação sendo, pois, um componente imprevisível). P.ex., o PIB brasileiro no ano corrente é uma função linear do PIB brasileiro do ano anterior e um choque aleatório do ano corrente – o termo “choque” é comumente utilizado em macroeconomia para se referir a variações exógenas imprevisíveis.

Um processo autoregressivo mais completo, de ordem k , seria:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + \dots + a_k y_{t-k} + e_t$$

Resolver uma equação a diferença finita significa encontrar a fórmula matemática que descreve a trajetória da variável em função exclusivamente do tempo (“ t ”), de termos de perturbação, e de constantes conhecidas – em alguns casos, uma dessas constantes é o valor da variável no instante inicial. Duas das principais técnicas de solução são introduzidas nas próximas sub-seções.

2.2 Solução por iteração

Uma maneira de encontrar a solução é por meio do método de iteração para frente (ou iteração progressiva). Denotando por y_t o valor da variável no t -ésimo instante de tempo, o procedimento é:

1. Tomar por base a equação e especificá-la para o instante $t = 1$, assumindo que y_0 é conhecido. O resultado é uma solução pois expressa a variável em $t = 1$ apenas em função de constantes e do termo de perturbação;
2. Repetir o passo anterior para $t = 2$ e $t = 3$, encontrando, pois, a solução para tais instantes de tempo;
3. Observar os resultados dos itens anteriores, identificando como a fórmula de solução muda entre os instantes de tempo. Com base nisso deduzir a fórmula de solução para o instante genérico, o t -ésimo instante, chegando, pois, à solução geral;
4. Verificar se a solução geral é correta. Para isso:
 - a. Introduzir a fórmula deduzida dos dois lados da equação original;
 - b. Caso seja obtida uma identidade, a fórmula deduzida está correta. Caso contrário, repetir os passos 2 e 3 agora para $t = 4, 5, \dots$, obtendo com isso mais informação sobre a estrutura da fórmula, e com base nisso re-deduzir a fórmula.

Aplicando o método à equação diferencial estocástica $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + e_t$ (1):

Passo 1: solução para $t = 1$:

Basta substituir “ t ” pelo número “1” nos subscritos da equação:

$$y_1 = a_0 + a_1 y_0 + e_1 \quad (2)$$

Fica claro que se tem uma solução, caso o valor de y no instante inicial $t = 0$ seja conhecido. Vamos assumir que este é o caso.

Passo 2: solução para $t = 2$:

Agora substituímos “ t ” pelo número “2” nos subscritos:

$$y_2 = a_0 + a_1.y_1 + e_2 \quad (3.a)$$

Assinala-se que esta não é uma solução, pois do lado esquerdo tem-se y_1 , um elemento que não é uma constante conhecida ou um termo de perturbação. Mas é possível eliminar este elemento, utilizando o resultado do passo anterior, i.e., a equação (2). Assim fazendo, tem-se:

$$y_2 = a_0 + a_1.(a_0 + a_1.y_0 + e_1) + e_2$$

Fatorando:

$$y_2 = a_0.(1 + a_1) + a_1^2.y_0 + a_1e_1 + e_2 \quad (3.b)$$

Passo 3: solução para $t = 3$:

Substituindo, na fórmula original, “ t ” por “3”, tem-se:

$$y_3 = a_0 + a_1.y_2 + e_3:$$

Tal como no passo anterior, acaba-se com uma fórmula que não é uma solução. É, pois, necessário substituir y_2 pela fórmula 3.b do passo anterior:

$$y_3 = a_0 + a_1.(a_0.(1 + a_1) + a_1^2.y_0 + a_1e_1 + e_2) + e_3$$

$$y_3 = a_0 + a_1.a_0.(1 + a_1) + a_1^3.y_0 + a_1^2e_1 + a_1e_2 + e_3$$

$$y_3 = a_0.(1 + a_1 + a_1^2) + a_1^3.y_0 + a_1^2e_1 + a_1e_2 + e_3 \quad (4)$$

Passo 3: dedução da fórmula geral

A fórmula geral se refere a um instante de tempo genérico, t . Um ponto de partida para deduzi-la é observar as duas últimas fórmulas:

$$y_2 = a_0.(1 + a_1) + a_1^2.y_0 + a_1e_1 + e_2 \quad (3.b)$$

$$y_3 = a_0.(1 + a_1 + a_1^2) + a_1^3.y_0 + a_1^2e_1 + a_1e_2 + e_3 \quad (4)$$

A última fórmula é mais esclarecedora. É nítido que alguns dos expoentes podem ser escrito em função do índice do lado esquerdo da equação. Por exemplo, tomando a primeira parcela, tem-se:

$$a_0.(1 + a_1 + a_1^2) = a_0.(a_1^0 + a_1^1 + a_1^2) = a_0 \sum_{i=0}^2 a_1^i$$

O limite superior do índice do somatório, 2, é igual a $3 - 1$. Um passo crucial para chegar na fórmula geral é substituir “3” por “ t ”, este último o símbolo que indica um instante genérico de tempo:

$$a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i \quad (i)$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao terceiro termo, o qual corresponde a: $a_1^2 e_1 + a_1 e_2 + e_3$. Visando usar um somatório com a mesma estrutura do utilizado para o primeiro termo, é adequado re-ordenar os componentes do terceiro termo, de maneira a que o elemento a_1 tenha um expoente progressivamente maior:

$$a_1^2 e_1 + a_1 e_2 + e_3 = e_3 + a_1 e_2 + a_1^2 e_1$$

O que pode ser escrito com o seguinte somatório:

$$\sum_{i=0}^{t-1} a_1^i e_{t-i} \quad (ii)$$

O segundo componente é o mais simples de estabelecer a fórmula genérica, qual seja, $a_1^3 \cdot y_0 = a_1^t \cdot y_0$ (iii).

Compilando as formas genéricas dos três termos, tem-se:

$$y_t = a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i + a_1^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i e_{t-i}$$

Passo 4: verificação

A equação estocástica original é: $y_t = a_0 + a_1 \cdot y_{t-1} + e_t$

Substituindo as expressões genéricas para y_t e y_{t-1} dos dois lados tem-se:

$$y_t = a_0 + a_1 \cdot y_{t-1} + e_t$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i + a_1^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i e_{t-i} = a_0 + a_1 \left(a_0 \sum_{i=0}^{t-2} a_1^i + a_1^{t-1} y_0 + \sum_{i=0}^{t-2} a_1^i e_{t-1-i} \right) + e_t$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i + a_1^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i e_{t-i} = a_0 + a_0 \sum_{i=0}^{t-2} a_1^{i+1} + a_1^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-2} a_1^{i+1} e_{t-1-i} + e_t$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i + a_1^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i e_{t-i} = \left[a_0 + a_0 \sum_{i=0}^{t-2} a_1^{i+1} \right] + a_1^t y_0 + \left[\sum_{i=0}^{t-2} a_1^{i+1} e_{t-1-i} + e_t \right] \quad (iv)$$

Avaliando separadamente cada termo dentro dos colchetes, tem-se:

$$\left[a_0 + a_0 \sum_{i=0}^{t-2} a_1^{i+1} \right] = a_0 [1 + a_1 + a_1^2 + \dots + a_1^{t-1}] = a_0 \left[\sum_{i=0}^{t-1} a_1^i \right] = a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i \quad (v. a)$$

$$\left[\sum_{i=0}^{t-2} a_1^{i+1} e_{t-1-i} + e_1 \right] = [a_1^1 e_{t-1} + a_1^2 e_{t-2} + \dots + a_1^{t-1} e_1 + e_t]$$

$$= [e_t + a_1^1 e_{t-1} + a_1^2 e_{t-2} + \dots + a_1^{t-1} e_1] = \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i e_{t-i} \quad (v.b)$$

Incorporando (v.a) e (v.b) na fórmula de verificação indicada por “iv” tem-se:

$$a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i + a_1^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i e_{t-i} = a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i + a_1^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i e_{t-i}$$

Chega-se, pois, a uma identidade, o que significa que a fórmula geral deduzida é correta.

Observação: os livros de Bueno (2008) e Hamilton (1994) aplicam iteração recursiva ou regressiva, tendo como primeiro passo $y_{t-1} = a_0 + a_1 y_{t-2} + e_{t-1}$. Chega-se ao mesmo resultado.

2.3 Método geral de solução

2.3.1 Enunciação do método

(Enders, cap.1, seção 4)

O método de iteração não é prático para equações a diferença finita de ordens superiores à unitária, ou seja, em que, do lado direito, a variável dependente aparece defasada em dois instantes de tempo, três instantes de tempo, etc. Daí a utilidade do método geral, o qual consiste nos seguintes passos, os quais são reproduzidos ipis literis de Enders (2014, p.16):

1. “Especificar a forma homogênea da equação a diferença finita e encontrar a solução homogênea;
2. Encontrar uma solução particular;
3. Obter a solução geral como soma da solução particular e de uma combinação linear das soluções homogêneas;
4. Eliminar a(s) constante(s) arbitrária(s) [oriundas da combinação linear das soluções homogêneas] impondo a(s) condição(ões) inicial (iniciais) na solução geral.”

Cabe esclarecer alguns conceitos presentes no procedimento anterior. Por forma homogênea se entende uma redução da equação a diferença finita original, em que, do lado direito, há apenas o termo com defasagens temporais da variável. Retomando o exemplo $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + e_t$, a forma homogênea é $y_t = a_1 y_{t-1}$.

A solução homogênea é uma solução apenas para a forma homogênea (ou seja, trata-se de uma expressão que, se substituída na forma homogênea, conduz a uma identidade). Uma solução homogênea recorrente é $y_t = A a_1^t$, com A sendo uma

constante arbitrária. Um desafio referente à solução homogênea é a existência de mais de uma solução homogênea possível, sendo necessário identificar todas as possibilidades.

Já por solução particular se entende um valor numérico que, se substituído na equação original, conduz a uma identidade.

A fórmula genérica da solução, cabe lembrar, corresponde à uma combinação linear das soluções homogêneas (ou seja, a soma de tais soluções, cada uma delas multiplicada por uma constante) aumentada pela solução particular. Ou seja, havendo apenas duas soluções homogêneas, a fórmula genérica é: $y_t = A_1 a_1^t + A_2 a_2^t + s$. Os números A_1 e A_2 são as constantes genéricas. Eles podem ser eliminados caso sejam conhecidos dois valores que a variável assume em dois instantes de tempo distintos, pois com isso tem-se um sistema com duas equações e duas incógnitas.

Visando fixar as definições, e também introduzir o método geral de solução, vamos seguir Enders (2014, p.16), aplicando o método à seguinte equação: $y_t = 0.9.y_{t-1} - 0.2.y_{t-2} + 3$ (trata-se, pois, de um processo autorregressivo de ordem 2).

2.3.2 Aplicação do método

Passo 1: solução homogênea

Iniciando pela solução homogênea, a forma homogênea é $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2}$. A forma genérica da solução homogênea é $y_t = A.a_1^t$. Substituindo-a na equação original, para com isso obter uma equação que possa ser resolvida numericamente (o que dará origem à raízes características).

$$A.a^t = 0.9(A.a^{t-1}) - 0.2(A.a^{t-2}) \leftrightarrow$$

$$a^t = 0.9 a^{t-1} - 0.2 a^{t-2} \leftrightarrow$$

$$1 = 0.9 a^{-1} - 0.2 a^{-2} \leftrightarrow$$

$$1 = 0.9 1/a - 0.2 1/a^2 \leftrightarrow$$

$$a^2 = 0.9.a - 0.2 \rightarrow a^2 - 0.9.a + 0.2 \leftrightarrow$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0.9 \pm \sqrt{0.9^2 - 0.8}}{2} = \frac{0.9 \pm 0.1}{2} = 0.4; 0.5$$

As duas raízes características são, portanto, 0.4 e 0.5, de modo que há duas soluções homogêneas, 0.4^t e 0.5^t . A combinação linear delas é $y_t^h = A_1 0.4^t + A_2 0.5^t$.

Passo 2: solução particular

Agora é preciso encontrar uma solução particular, ou seja, um número que, se substituído por y na equação diferencial conduz a uma identidade. Para isso, basta substituir todos os elementos com y , não importando se estão defasados ou não, com uma mesma incógnita, por exemplo, " x ":

$$y_t = 0.9.y_{t-1} - 0.2.y_{t-2} + 3$$

$$x = 0.9.x - 0.2.x + 3 \leftrightarrow$$

$$x = 0.7.x + 3 \leftrightarrow$$

$$0.3x = 3 \rightarrow x = 10 \leftrightarrow$$

Verificando:

$$10 = 0.9.10 - 0.2.10 + 3 \rightarrow 7 = 9 - 2.10 \rightarrow 7 = 7.$$

A forma geral da solução é, portanto: $y_t^h = A_1 0.4^t + A_2 0.5^t + 10$.

Passo 3: determinação das constantes arbitrárias A_1 e A_2 :

Para isso é preciso conhecer, com exatidão, os valores da variável em dois instantes de tempo. Seguindo Enders (2013, p.16), seja assumido que é sabido que $y_0 = 13$ e $y_1 = 11.3$. O que conduz ao seguinte sistema linear de equações:

$$(1) 13 = A_1 0.4^0 + A_2 0.5^0 + 10$$

$$(2) 11.3 = A_1 0.4^1 + A_2 0.5^1 + 10$$

Ou:

$$(1) 13 = A_1 + A_2 + 10$$

$$(2) 1.3 = A_1 0.4 + A_2 0.5$$

Ou, ainda:

$$(1) 3 = A_1 + A_2$$

$$(2) 1.3 = A_1 0.4 + A_2 0.5$$

A partir de (1): $A_2 = 3 - A_1$. Incorporando em 2:

$$1.3 = A_1 0.4 + (3 - A_1) 0.5 \rightarrow$$

$$1.3 = A_1 0.4 + 1.5 - 0.5 A_1 \rightarrow$$

$$-0.2 = -A_1 0.1 \rightarrow$$

$A_1 = 2$, e, pois, $A_2 = 1$.

Com isso obtém-se a solução geral do sistema: $y_t^h = 2(0.4^t) + 0.5^t + 10$.

Fica como exercício a verificação da solução por meio de substituição dela na equação diferencial original.

2.3.3 Um procedimento de solução para equações a diferenças finitas estocásticas

Seja considerada uma extensão da equação a diferenças do item anterior em que é incorporado um termo estocástico:

$$y_t = 0.9.y_{t-1} - 0.2.y_{t-2} + 3 + e_t$$

O procedimento de solução tem, neste caso, de ser alterado, combinando-se dois métodos: (i) solução homogênea e particular (técnica já vista no item anterior) e (ii) método dos coeficientes indeterminados. O procedimento consiste em:

1. Ignorar a parte estocástica e obter soluções homogênea e parcial para a parte não-estocástica;
2. Assumir a seguinte forma padrão de solução da parte estocástica: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-i}$. Substituir essa forma na equação original, ignorando a constante;
3. Obter expressões para os parâmetros da solução estocástica, sendo eles $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ (mesmo sendo infinitos parâmetros, é possível deduzir uma fórmula geral para os mesmos);
4. Somar as soluções homogênea, particular e estocástica, mantendo constantes indeterminadas multiplicando os componentes da solução homogênea;
5. Determinar as constantes utilizando condições iniciais para "y" e "e", para isso ignorando o componente estocástico da solução. Ao terminar, obtém-se a solução.

No que segue, o procedimento de solução é aplicado à equação $y_t = 0.9.y_{t-1} - 0.2.y_{t-2} + 3 + e_t$.

A forma geral para a parte determinista é: $y_t = A_1.(0.4)^t + A_2.(0.5)^t + 10$.

Agora resolvendo a parte estocástica, utiliza-se a solução candidata padrão $\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-i}$. Incorporando à equação original sem a constante:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-i} &= 0.9.[\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-1-i}] - 0.2[\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-2-i}] + e_t \\ a_0 e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + a_3 e_{t-3} + \dots &= 0.9(a_0 e_{t-1} + a_1 e_{t-2} + a_2 e_{t-3} + \dots) - \\ &\quad 0.2(a_0 e_{t-2} + a_1 e_{t-3} + a_2 e_{t-4} + \dots) + e_t \leftrightarrow \\ a_0 e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + a_3 e_{t-3} + \dots &= e_t + 0.9.a_0 e_{t-1} + (0.9a_1 - 0.2a_0)e_{t-2} + (0.9a_2 - 0.2a_1)e_{t-3} \\ &\quad + (0.9a_3 - 0.2a_2)e_{t-4} + \dots \end{aligned}$$

Do que decorre:

$$a_0 = 1;$$

$$a_1 = 0.9a_0 = 0.9$$

$$a_2 = 0.9a_1 - 0.2a_0 = 0.9(0.9) - 0.2(1) = 0.81 - 0.2 = 0.61;$$

$$a_3 = 0.9a_2 - 0.2a_1 = 0.9(0.61) - 0.2(0.9) = 0.549 - 0.18 = 0.369$$

Com isso a solução completa é:

$$y_t^h = A_1.(0.4)^t + A_2.(0.5)^t + 10 + 0.9e_t + \sum_{i=2}^{\infty} (0.9^i - 0.2^{i-1})e_{t-i}$$

A determinação das constantes tem de ser feita com base em condições iniciais, ignorando-se os termos estocásticos:

$$y_0 = A_1.(0.4^0) + A_2.0.5^0 + 10 \text{ (i)}$$

$$y_1 = A_1.(0.4^1) + A_2.0.5^1 + 10 \text{ (ii)}$$

Ou:

$$y_0 = A_1 + A_2 + 10 \text{ (i)}$$

$$y_1 = A_1. 0.4 + A_2.0.5 + 10 \text{ (ii)}$$

De (i):

$$y_0 = 10 + A_1 + A_2 \rightarrow A_2 = y_0 - 10 - A_1 \text{ (i')}$$

Incorporando (i') em (ii):

$$Y_1 = 10 + 0.5A_1 + 0.4(Y_0 - 10 - A_1) = 10 + 0.5A_1 + 0.4Y_0 - 4 - 0.4A_1 = 6 + 0.1.A_1 + 0.4.Y_0 \rightarrow 0.1A_1 = Y_1 - 6 - 0.4Y_0 \rightarrow A_1 = 10.Y_1 - 60 - 4.Y_0 \text{ (ii')}$$

Incorporando (ii') em (i'):

$$A_2 = Y_0 - 10 - (10.Y_1 - 60 - 4.Y_0) = Y_0 - 10 - 10.Y_1 + 60 + 4.Y_0 = 9Y_0 + 50 - 10.Y_1 \rightarrow$$

A solução é:

$$A_2 = 5Y_0 - 10Y_1 + 50, A_1 = -4Y_0 + 10Y_1 - 60$$

Com isso, a forma geral da solução é:

$$y_t^h = (-4Y_0 + 10Y_1 - 60).(0.4^t) + (-4Y_0 + 10Y_1 - 60).0.5^t + 10 + 0.9e_t + \sum_{i=2}^{\infty} (0.9^i - 0.2^{i-1})e_{t-i}$$

3 Estabilidade

3.1 Esclarecimentos sobre a definição

Uma vez encontrada uma solução geral para uma equação a diferença finita, é necessário avaliar a estabilidade de tal solução. A condição de estabilidade de uma equação a diferença finita é a condição de convergência da equação homogênea correspondente. Convergir significa aproximar-se progressivamente de um número finito. O inverso de convergir, ou seja, divergir, é aumentar progressivamente em valor absoluto, sem haver um limite superior.

O critério de estabilidade de uma equação a diferença finita, e, pois, de um modelo econométrico para uma série de tempo (unidimensional) é o de que todas as raízes do polinômio característico da forma homogênea da equação pertençam ao interior do círculo unitário do plano complexo.

Quanto a este critério, cabe esclarecer:

(1) Ele garante a convergência da forma homogênea da equação, bem como da solução geral da equação. Ou seja, ele garante que a solução geral não tende ao infinito (comportamento este indesejável para um modelo econométrico pois séries reais, como, p.ex., PIB e inflação, não são explosivas);

(2) A definição matemática geral do critério não será apresentada (de fato, nenhum dos principais livros de econometria de séries de tempo, quais sejam, Enders e Hamilton, apresentam tal definição);

(3) Porém será utilizada, quando necessário, uma condição mais simples, a qual é condição suficiente para a estabilidade, a de que todas as raízes características sejam inferiores à unidade;

(4) Ao estudante interessado em conhecer a definição matemática geral recomenda-se o estudo do teorema de Schur-Cohn, o qual se refere à estabilidade de um polinômio. Uma referência de leitura é: Chipman, J. S. (1950). The multi-sector multiplier. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 355-374.

3.2 Um exemplo esclarecedor (de verificação da condição de estabilidade)

Visando mostrar como a condição de estabilidade pode ser verificada, será considerado um processo AR(2) genérico. A exposição é uma reprodução simplificada da seção 6 do livro de Enders (2015).

A equação é:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2}$$

Como afirma Enders, a fórmula genérica de uma solução homogênea é $y_t^h = A \cdot \alpha^t$ (o superscrito “h” é usado para denotar uma solução homogênea). Substituindo na equação original tem-se: $A \cdot \alpha^t = a_1(A \cdot \alpha^{t-1}) + a_2(A \cdot \alpha^{t-2})$. Ou, fatorando:

$$\alpha^t = a_1 \alpha^{t-1} + a_2 \alpha^{t-2}$$

Também é possível eliminar α^t pois os dois lados da equação estão multiplicados por este termo. Mas é mais fácil dividir por α^{t-2} :

$$\alpha^2 = a_1 \alpha + a_2.$$

Trata-se de uma equação quadrática em alfa. Essa equação é denominada por “equação característica” e as raízes dela por “raízes características”.

Aplicando a fórmula de Báscara com $a = 1$, $b = -a_1$, $c = -a_2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{a_1 \pm \sqrt{(-a_1)^2 + 4a_2}}{2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{d}}{2}$$

Em que “d” é o discriminante. Conhecer a solução requer saber os valores das constantes a_1 e a_2 . Porém é possível avaliar as possibilidades.

1. Se $d > 0$, há duas raízes reais diferentes, que podem ser denotadas por α_1 e α_2 (atenção esta letra é a letra grega “alfa” e não a letra “a”). Neste caso, a equação homogênea tem duas soluções, α_1^t e α_2^t , e a combinação linear das duas pode ser tomada como a solução homogênea, ou seja, $y_t^h = A_1 \cdot \alpha_1^t + A_2 \cdot \alpha_2^t$. É crucial notar que se α_1 ou α_2 é superior à unidade, a solução homogênea é divergente, tendendo rapidamente ao infinito (uma série explosiva). O que é evitado se as duas raízes características forem inferiores à unidade em módulo (condição suficiente para a estabilidade);
2. Se $d = 0$, há apenas uma raiz real, a qual é $a_1/2$. Mas há também uma segunda solução homogênea possível, $t(a_1/2)^t$ (isso pode ser demonstrando substituindo essa expressão na equação original, o que conduz a uma identidade). Com isso, a solução homogênea completa, a qual deve conter a combinação linear de todas as soluções homogêneas possíveis, é: $y_t^h = A_1(a_1/2)^t + A_2 \cdot t \cdot (a_1/2)^t$. Essa solução é explosiva (tende ao infinito) se $a_1 > 2$.
3. Se $d < 0$, não há raízes reais, mas sim raízes complexas, ou seja, na forma de números imaginários. Tais raízes podem ser escritas como $a_1 = (a_1 + i\sqrt{-d})/2$, $a_2 = (a_2 - i\sqrt{-d})/2$, com $i = \sqrt{-1}$. É possível utilizar resultados matemáticos, como o teorema de Moivre, para chegar à expressão (em coordenadas polares) para as soluções, mas tais detalhes serão omitidos (ver Bueno, 2008, páginas 283 a 289). O essencial é que a condição de estabilidade é determinada pela expressão $r = \sqrt{-a_2}$. Se $|a_2| < 1$, a solução é estável, o mesmo sendo verdade se $|a_2| = 1$, mas, neste último caso, a série exibe oscilações periódicas. Com $|a_2| > 1$, não há estabilidade, mas sim explosão para o infinito.

É o terceiro caso que dá origem à noção de “círculo unitário” do plano complexo, a qual compõe a condição de estabilidade. De fato, os três casos podem ser representados no plano complexo, uma vez que este é a combinação de um eixo horizontal de número reais e um eixo vertical de números imaginários – números puramente reais, pois, ocorrem em cima do eixo horizontal. Neste plano, pois, se todas as raízes características puderem ser representadas como pontos pertencentes ao interior de um círculo de raio unitário, então há estabilidade.

3.3 Estabilidade e persistência de choques

Seja considerada a equação do item anterior, $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + e_t$. A solução geral da mesma, sem determinar as constantes, é:

$$y_t = A_1 a_1^t + A_2 a_2^t + c + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i e_{t-i}$$

Com base na solução é possível calcular o impacto na variável “y”, j anos à frente, de um choque aleatório que ocorre no ano corrente (em “t”). Para isso, é mais fácil adiantar a equação em j anos:

$$y_{t+j} = A_1 a_1^{t+j} + A_2 a_2^{t+j} + c + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i e_{t+j-i}$$

Basta derivar a solução em função do choque e_t , para o qual, pois, $i = j$. Para evitar erros, especialmente quanto ao índice do coeficiente ϕ a considerar, é útil desenvolver o somatório à direita:

$$y_{t+j} = A_1 a_1^{t+j} + A_2 a_2^{t+j} + c + \phi_0 e_{t+j} + \phi_1 e_{t+j-1} + \dots + \phi_j e_t + \phi_{j+1} e_{t-1} + \dots$$

Com isso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{t+j}}{\partial e_t} &= \frac{\partial}{\partial e_t} [A_1 a_1^{t+j} + A_2 a_2^{t+j} + c + \phi_0 e_{t+j} + \phi_1 e_{t+j-1} + \dots + \phi_j e_t + \phi_{j+1} e_{t-1} + \dots] \\ &= \phi_j \end{aligned}$$

Ou seja, um choque tem efeito j instantes à frente de magnitude igual à ϕ_j . Como visto no exemplo de equação a diferenças estudado no item 2.3.3 acima, ϕ_j é função de potências dos coeficientes da equação, a_1 e a_2 , ou seja, é função de a_1^j e de a_2^j . Eis o ponto crucial: se $|a_1| > 1$ ou $|a_2| > 1$, então o efeito de um choque não decai com a distância entre o momento em que o choque ocorre e o momento corrente. Ou seja, os choques são permanentes (ou, mais, precisamente, o efeito dos choques é permanente). Quanto a isso, há dois pontos a observar:

1. Uma vez que $\phi_j = f(a_1^j, a_2^j)$, a relação entre estabilidade e não-persistência de choques é direta: sendo a condição de estabilidade atendida, o impacto futuro de um choque decai progressivamente com a distância entre o momento de ocorrência do choque e o momento atual. Choques têm, pois, efeitos futuros, mas, porém, tais efeitos não são persistentes. Sendo a condição de estabilidade violada, choques têm efeitos permanentes;
2. A noção de permanência de choques é crucial em econometria de séries de tempo, pois tem uma interpretação econômica clara: uma ocorrência exógena à economia de referência alteraria permanentemente a trajetória dos principais agregados macroeconômicos da economia, p.ex., do PIB, do nível de emprego, da taxa de inflação, do nível de juro de referência, etc.

3 Sumário

Esta primeira nota de aula procurou introduzir o procedimento de solução de equações diferenciais que será automaticamente implementado pelo computador ao estimar modelos de séries de tempo. O conhecimento deste procedimento permite ao menos interpretar uma mensagem de erro comum, a de que as raízes características não pertencem ao círculo unitário. Ou seja, a condição de estabilidade é violada, e, pois, a estimação econométrica dos parâmetros da equação a diferenças, com base nos dados, é impossível.

Alguns princípios gerais que podem auxiliar a execução da análise de dados são:

1. Quanto à estabilidade, se todas as raízes características forem inferiores à unidade em módulo, então a equação diferencial é convergente. Conforme afirma Enders, e como será visto nas próximas notas de aula, há uma relação entre a condição de estabilidade e uma característica fundamental de uma série de tempo, se ela é ou não estacionária;
2. Quanto maior a ordem de uma equação diferencial (ou de um modelo de séries de tempo), maior é o conjunto de dados necessário para estimar tal equação (mais longa a série de dados reais). Como visto, no caso de uma equação de ordem 2, é necessário conhecer os valores da série em dois momentos do tempo, para com isso determinar as constantes arbitrárias. Analogamente, uma equação de ordem 3 requer o conhecimento dos valores da série em três momentos do tempo, e assim por diante;
3. O número de raízes características é sempre igual à ordem da equação diferencial.